第十二届全国大学生创新创业年会学术论文

欧拉常数的连分数序列逼近

大连理工大学　胡潇允，鲁大伟，王晓光

1．第一作者单位 大连理工大学数学科学学院，辽宁省大连市　 邮编：116024

2．第二作者单位 大连理工大学数学科学学院，辽宁省大连市 邮编：116024

3．第三作者单位 大连理工大学数学科学学院，辽宁省大连市 邮编：116024

（期刊: 数学结论(Results in Mathematics) 发表时间：2018 年 2 月 10 日）

指导教师 鲁大伟 教授

中文摘要 近几年国内外许多学者为伽玛函数和欧拉常数建立了有更快收敛速度的逼近公式和更精确的不等式，不仅极大丰富了数学逼近理论中的多个研究问题，而且在实际工程计算中也具有重要的参考指导意义。

本项目基于逼近伽玛函数的经典公式和逼近欧拉常数的具有简单形式的序列， 结合多项式和连分数逼近的知识分别建立新的公式和相关的上下界不等式，并且给出严格证明过程。为了证明所得新序列优于 DeTemple、Mortici 和鲁大伟构造的序列，本文的最后还给出一些数值模拟来说明项目带来的优越性。

英文摘要 In this paper, we give some new quicker convergent sequences toward Euler’s constant using the continued fraction. For demonstrating the superiority of the new sequences over DeTemple’s sequence, Mortici’s sequences and Lu’s sequences, some numerical simulations are also given in this article.

关键词 欧拉常数；连分数；逼近速度；渐进展开；不等式

一、引言

众所周知，收敛于常数的收敛序列在数论、概率论、物理学等许多科学和数学领域都是非常重要的，因此我们经常需要对基本常数设置一些新的收敛序列，这是数学常数理论中的一个重要问题。其中最著名的常数之一，欧拉常数，表示为

$$\gamma = 0.577215$$

国家级大学生创新创业训练计划支持项目（201810141127）

作者简介：胡潇允（1997-），女，山西太原人，学生，数学科学学院信息与计算科学专业。

鲁大伟（1981-），男，辽宁鞍山人，教授，博士生导师，主要从事概率极限理论等研究。

王晓光（1977-），男，吉林省吉林市人，副教授，博士生导师，主要从事数理统计等研究。

它是以下序列的极限

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \tag{1}$$

欧拉常数在数学和自然科学中都得到了广泛的应用。然而，序列 $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ 的收敛速度为n^{-1}，这个速度是比较缓慢的。到目前为止，许多研究人员都致力于寻找一种收敛速度更快的 γ 序列，并取得了许多令人鼓舞的结果。

例如，Mortici，Vernescu 和 Young 给出了下面的估计[7，8，17，18]：

$$\frac{1}{2n+1} < \gamma_n - \gamma < \frac{1}{2n}, \quad n \geq 1 \tag{2}$$

接下来, DeTemple [1，2] 构造了一个新的收敛到 γ 的数列 $(D_n)_{n\geq 1}$

$$D_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{3}$$

其中

$$\frac{1}{24(n+1)^2} < D_n - \gamma < \frac{1}{24n^2}, \quad n \geq 1 \tag{4}$$

这个新数列的收敛速度为n^{-2}。Vernescu[16]也给出了另外的改进

$$V_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n} - \ln n \tag{5}$$

其中

$$\frac{1}{12(n+1)^2} < \gamma - V_n < \frac{1}{12n}, \quad n \geq 1 \tag{6}$$

尽管（3）和（5）只是对欧拉数列 $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ 进行了一些微小的改进，并将数列的收敛速度从n^{-1}提升为n^{-2}。

除了上面所列的这些改进, Mortici[9]也构造了如下的一些数列：

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(6-2\sqrt{6})n} - \ln\left(n + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \tag{7}$$

和

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(6+2\sqrt{6})n} - \ln\left(n - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \tag{8}$$

（7）和（8）都将欧拉数列 $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ 的收敛速度提升为n^{-3}。

同时我们了解到鲁大伟教授[9]也给出了一些收敛速度高的序列，列举如下：

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n - \cfrac{a_1}{n + \cfrac{a_2 n}{n + \cfrac{a_3 n}{n + \cfrac{a_4 n}{n + \ldots}}}} \tag{9}$$

其中$a_1 = \frac{1}{2}$，$a_2 = \frac{1}{6}$，$a_3 = -\frac{1}{6} \ldots$。

对于任意固定的$k, s \in N$, 其中 N 是正整数集合

$$r_{n,k}^{(s)}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n-\frac{1}{k}\ln\left(\cfrac{b_1}{n+\cfrac{b_2n}{n+\cfrac{b_3n}{n+\cfrac{b_4n}{n+\cdots}}}}\right) \tag{10}$$

其中

$$\mathrm{b}_1=\frac{\mathrm{k}}{2},\ \mathrm{b}_2=\frac{2\text{-}3\mathrm{k}}{12},\ \mathrm{b}_3=\frac{3\mathrm{k}^2+4}{12（3\mathrm{k}\text{-}2）},\ \mathrm{b}_4=\frac{15\mathrm{k}^4\text{-}30\mathrm{k}^3+60\mathrm{k}^2-104\mathrm{k}+96}{20（3\mathrm{k}-2）(3\mathrm{k}^2+4)}\ldots。$$

对于任意固定的 $k,s\in\mathrm{N}$，其中 N 是正整数集合

$$L_{n,k}^{(s)}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{rn}-\ln n-\ln\left(1+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\cdots+\frac{c_s}{n^s}\right) \tag{11}$$

其中

$$\mathrm{c}_1=\frac{2\text{-r}}{2\mathrm{r}},\ \mathrm{c}_2=\frac{\mathrm{r}^2\text{-}12\mathrm{r}+12}{24\mathrm{r}^2},\ \mathrm{c}_3=\frac{\mathrm{r}^3+2\mathrm{r}^2\text{-}12\mathrm{r}+8}{48\mathrm{r}^3}\ldots。$$

鲁大伟教授也给出了许多不等式来描述这些序列的优越性，例如，对于任意 $n\in\mathrm{N}$，$n\geq 2$，

$$\frac{1}{720(n+1)^4}<L_{n,k}^{(s)}-\gamma<\frac{1}{720(n-1)^4} \tag{12}$$

对于所有$n\in\mathrm{N}$

$$\frac{1}{180(n+1)^4}<\gamma-r_{n,2}^{(3)}<\frac{1}{180n^4} \tag{13}$$

这些工作极大地激励了我们的学习。基于 DeTemple、Mortici 和鲁大伟的早期研究成果，我们旨在建立收敛率较高、形式相对简单的新近似。

我们将本文的其余部分安排如下。在第 2 部分，我们给出了新的近似和不等式。在第 3 部分给出主要结果的证明。在第 4 部分，通过数值模拟来说明新序列的优越性。

二、主要结论

（一）定理 1

构造欧拉常数的收敛序列如下：

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-ln\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{n}\left(\cfrac{a_1}{n+\cfrac{a_2n}{n+\cfrac{a_3n}{n+\cfrac{a_4n}{n+\ldots}}}}\right) \tag{14}$$

其中

$$\mathrm{a}_1=\frac{1}{24},\ \mathrm{a}_2=1,\ \mathrm{a}_3=-\frac{17}{40},\ \mathrm{a}_4=\frac{17}{40}\ldots。$$

令

$$s_n^{(1)}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{n}\right) \tag{15}$$

$$s_n^{(2)}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{n+a_2}\right) \tag{16}$$

$$s_n^{(3)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{n + \frac{a_2 n}{n + a_3}}\right) \tag{17}$$

$$s_n^{(4)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{n + \frac{a_2 n}{n + \frac{a_3 n}{n + a_4}}}\right) \tag{18}$$

我们还有如下结论：

$$\lim_{n\to\infty}(s_n^{(1)} - \gamma) = -\frac{1}{8} \tag{19}$$

$$\lim_{n\to\infty}(s_n^{(2)} - \gamma) = -\frac{17}{240} \tag{20}$$

$$\lim_{n\to\infty}(s_n^{(3)} - \gamma) = \frac{289}{7681} \tag{21}$$

$$\lim_{n\to\infty}(s_n^{(4)} - \gamma) = \frac{2071}{134400} \tag{22}$$

（二）定理 2

对于所有自然数 n，我们有

$$\frac{17}{240(n+1)^5} \le \gamma - s_n^{(2)} \le \frac{17}{240n^5} \tag{23}$$

$$\frac{289}{7680(n+1)^6} \le s_n^{(3)} - \gamma \le \frac{289}{7680n^6} \tag{24}$$

（三）引理 1

为了得到上面定理，我们引入该引理，它被使用于[10,15]，对于数列的收敛速度十分有用：

若 $(x_n)_{n\ge 1}$ 是一个收敛到 0 的序列且满足下面条件

$$\lim_{n\to\infty} n^s (x_n - x_{n+1}) = l \in [-\infty, +\infty] \tag{25}$$

其中$s > 1$，则

$$\lim_{n\to\infty} n^{s-1} x_n = \frac{l}{s-1} \tag{26}$$

三、定理证明

（一） 定理 1 证明

根据[14]中定理 2.1 或[15]中定理 5 的论证，我们需要计算 $a_1 \ge 0$ 的值，这将产生最精确的形式近似值。

$$s_n^{(1)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{n}\right) \tag{27}$$

为了得到近似精度，我们使用了如下的一种方法，即当$s_n^{(3)} - \gamma$更快地收敛到零时，考虑（27）更好，使用

（27），我们有

$$s_n^{(1)} - s_{n+1}^{(1)} = -\frac{1}{n+1} + \ln\left(n+\frac{3}{2}\right) - \ln\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\left(\frac{a_1}{n+1}\right) \tag{28}$$

将此式以 $1/n$ 进行级数展开，我们可以得到：

$$s_n^{(1)} - s_{n+1}^{(1)} = \frac{24a_1+1}{12}\frac{1}{n^3} + \frac{12a_1-1}{4}\frac{1}{n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right) \tag{29}$$

从引理 1 我们可以得知，如果满足（25）的 s 的值更高，则 $(s_n^{(1)})_{n\geq 1}$ 序列的收敛速度更快。所以利用引理 1，我们得到

(1) 如果 $a_1 \neq 1/24$，则 $(s_n^{(1)}-\gamma)_{n\geq 1}$ 序列的收敛速度为 n^{-2}，由于

$$\lim_{n\to\infty} n^3(s_n^{(1)} - \gamma) = \frac{24a_1+1}{12} \neq 0$$

(2) 如果 $a_1 = 1/24$，则从（29）我们可以得知

$$s_n^{(1)} - s_{n+1}^{(1)} = -\frac{1}{8}\frac{1}{n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

且此时 $(s_n^{(1)}-\gamma)_{n\geq 1}$ 序列的收敛速度为n^{-3}，由于

$$\lim_{n\to\infty} n^3(s_n^{(1)} - \gamma) = -\frac{1}{24}$$

因此，我们可以知道序列 $(s_n^{(1)})_{n\geq 1}$ 只有当 a_1=1/24 时才会达到最快的收敛速度。

然后我们定义序列 $(s_n^{(2)})_{n\geq 1}$ 如下，

$$s_n^{(2)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{n}\left(\frac{\frac{1}{24}}{n+a_2}\right) \tag{30}$$

使用与（28）-（29）类似的方法，我们得到

$$s_n^{(2)} - s_{n+1}^{(2)} = \frac{-1+a_2}{8}\frac{1}{n^4} + \frac{-40a_2^2-60a_2+83}{240}\frac{1}{n^5} + O\left(\frac{1}{n^6}\right) \tag{31}$$

序列 $(s_n^{(2)})_{n\geq 1}$ 只有当 $a_2 = 1$ 时才会达到最快的收敛速度，因此我们可以得到

$$\lim_{n\to\infty} n^4(s_n^{(2)} - \gamma) = -\frac{17}{960}$$

此时的收敛速度为 n^{-4}。

此外，我们将第三个序列定义为

$$s_n^{(3)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{n}\left(\frac{\frac{1}{24}}{n+\frac{n}{n+a_3}}\right) \tag{32}$$

则可以得到

$$s_n^{(3)} - s_{n+1}^{(3)} = \frac{-40a_3-17}{240}\frac{1}{n^5} + \frac{10a_3^2+40a_3+17}{48}\frac{1}{n^6} + O\left(\frac{1}{n^7}\right)$$

令$a_3 = -17/40$，我们可以得到最快的收敛序列 $(s_n^{(3)})_{n\geq 1}$，收敛速度为 n^{-5}，同理我们可以得到 $a_4 = 17/40...$，使用相同的方法我们可以得到所有结论。

（二） 定理 2 证明

根据[1]中的定理论证或[2]中所使用的证明方法，我们首先证明（29）。我们定义

$$\gamma - s_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty}(s_{k+1}^{(2)} - s_k^{(2)}) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \tag{33}$$

其中

$$f(k)=\frac{1}{k+1}-ln\left(k+\frac{3}{2}\right)+ln\left(k+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{24(k+1)(k+2)}+\frac{1}{24k(k+1)}$$

则我们对$f(k)$求导可以得到

$$f'(x)=-\frac{1}{12}\frac{17x^2+34x+6}{(x+1)^2(2x+3)(x+2)^2(2x+1)x^2} \tag{34}$$

为了得到（23）式的上确界不等式，对于任意 $x\geq 1$，我们可以得到

$$-f'(x)\leq\frac{17}{8(x+\frac{1}{2})^7} \tag{35}$$

由于 $f(\infty)=0$，我们得到

$$f(k)=\int_k^\infty -f'(x)dx\leq\frac{17}{8}\int_k^\infty (x+\frac{1}{2})^{-7}dx=\frac{17}{48}(k+\frac{1}{2})^{-6}\leq\frac{17}{48}\int_k^{k+1} x^{-6}dx \tag{36}$$

结合（33）式和（36）式，我们可以发现对于任意满足 $n\in\mathbb{N}$ 且 $n\geq 2$ 的 n，

$$\gamma-s_2^{(2)}\leq\sum_{k=n}^{\infty}\frac{17}{48}\int_k^{k+1} x^{-6}dx=\frac{17}{48}\int_n^\infty x^{-6}dx=\frac{17}{240n^5} \tag{37}$$

对于（34）式的下确界不等式，我们使用下列结论：

对于所有$x\geq 1$，

$$-f'(x)\geq\frac{17}{8(x+\frac{4}{3})^7} \tag{38}$$

由于 $f(\infty)=0$ 且再根据（38）式，我们可以得到：

$$f(k)=\int_k^\infty -f'(x)dx\geq\frac{17}{8}\int_k^\infty (x+\frac{4}{3})^{-7}dx$$

$$=\frac{17}{48}(k+\frac{4}{3})^{-6}$$

$$\geq\frac{17}{48}\int_{k+1}^{k+2} x^{-6}dx \tag{39}$$

所以我们可以得到如下结论：

对于所有满足 $n\in\mathbb{N}$ 且 $n\geq 2$ 的 n

$$\gamma-s_n^{(2)}\geq\sum_{k=n}^{\infty}\frac{17}{48}\int_{k+1}^{k+2} x^{-6}dx=\frac{17}{48}\int_{n+1}^\infty x^{-6}dx=\frac{17}{240(n+1)^5} \tag{40}$$

因此，结合（37）与（40），我们可以完成（23）式的证明：

接下来，证明（24）式就比较容易。首先我们可以定义：

$$s_n^{(3)}-\gamma=\sum_{k=n}^{\infty}\left(s_k^{(3)}-s_{k+1}^{(3)}\right)=\sum_{k=n}^{\infty}g(k) \tag{41}$$

其中

$$g'(x)=-\frac{1}{12}\frac{27744000x^5+12994080x^4+171055016x^3+119998083x^2+38961783x+4655637}{(40x+23)^2x^3(2x+1)(40x^2+103x+63)^2(2x+3)(x+1)} \tag{42}$$

对于上确界的确定，我们使用 $g(\infty)=0$，对于任意 $x\geq 1$，

$$-g'(x)\leq \frac{2023}{1280(x+\frac{1}{2})^8} \tag{43}$$

从（43）式中我们可以得到：

$$g(k)=\int_k^\infty -g'(x)dx\leq \frac{2023}{1280}\int_k^\infty (x+\frac{1}{2})^{-8}dx$$

$$=\frac{289}{1280}(k+\frac{1}{2})^{-7}$$

$$\leq \frac{289}{1280}\int_k^{k+1} x^{-7}dx \tag{44}$$

对于所有$n\in\mathbb{N}$且$n\geq 2$,

$$s_n^{(3)}-\gamma\leq \sum_{k=n}^{\infty}\frac{289}{1280}\int_k^{k+1} x^{-7}dx=\frac{289}{1280}\int_n^\infty x^{-7}dx=\frac{289}{7680n^6} \tag{45}$$

对于下确界的获得，由于 $g(\infty)=0$ 而且对于 $x\geq 1$，满足

$$-g'(x)\geq \frac{2023}{1280(x+1)^8}$$

我们有

$$g(k)=\int_k^\infty -g'(x)dx\geq \frac{2023}{1280}\int_k^\infty (x+1)^{-8}dx$$

$$=\frac{289}{1280}(k+1)^{-7}$$

$$\geq \frac{289}{1280}\int_{k+1}^{k+2} x^{-7}dx \tag{46}$$

结合（41）式与（46），我们可以得到对于 $n\in\mathbb{N}$ 且 $n\geq 2$，

$$s_n^{(3)}-\gamma\geq \sum_{k=n}^{\infty}\frac{289}{1280}\int_{k+1}^{k+2} x^{-7}dx=\frac{289}{1280}\int_{k+1}^\infty x^{-7}dx=\frac{289}{7680(n+1)^6} \tag{47}$$

结合（45）与（47），我们可以完成（24）式的证明。

四、数值模拟

我们给出表 3.1，表 3.2，表 3.3 的结论来说明我们构造的数列$(s_n^{(1)})_{n\geq 1}$，$(s_n^{(2)})_{n\geq 1}$，$(s_n^{(3)})_{n\geq 1}$ 和 $(s_n^{(4)})_{n\geq 1}$相对于 DeTemple 的数列 $(D_n)_{n\geq 1}$，和 Mortici 的数列$(v_n)_{n\geq 1}$，$(u_n)_{n\geq 1}$，鲁大伟的数列 $(L_{2\sqrt{2}-2,n}^{(2)})_{n\geq 1}$，$(r_{n,1}^{(2)})_{n\geq 1}$ 和 $(r_{n,2}^{(3)})_{n\geq 1}$的优越性。

表 3.1 $(D_n)_{n\geq 1}$，$(v_n)_{n\geq 1}$ 和 $(u_n)_{n\geq 1}$的模拟

n	$D_n-\gamma$	$v_n-\gamma$	$\gamma-u_n$
10	3.7733×10^{-4}	2.4228×10^{-5}	2.1179×10^{-5}
50	1.6337×10^{-5}	1.8390×10^{-7}	1.7901×10^{-7}
100	4.1252×10^{-6}	2.2833×10^{-8}	2.2528×10^{-8}

500	1.6633×10^{-7}	1.8169×10^{-10}	1.8120×10^{-10}
1000	4.1625×10^{-8}	2.2696×10^{-11}	2.2665×10^{-11}

表 3.2 $(r_{n,1}^{(2)})_{n\geq1}$，$(r_{n,2}^{(3)})_{n\geq1}$ 和 $(L_{2\sqrt{2}-2,n}^{(2)})_{n\geq1}$ 的模拟

n	$\gamma-r_{n,1}^{(2)}$	$\gamma-r_{n,2}^{(3)}$	$L_{2\sqrt{2}-2,n}^{(2)}-\gamma$
10	2.2748×10^{-5}	4.5429×10^{-7}	1.7275×10^{-7}
50	1.9192×10^{-7}	8.5398×10^{-10}	2.3444×10^{-10}
100	2.4147×10^{-8}	5.4455×10^{-11}	1.4276×10^{-11}
500	1.9419×10^{-10}	8.8534×10^{-14}	2.2348×10^{-14}
1000	2.4290×10^{-11}	5.5444×10^{-15}	1.3929×10^{-15}

表 3.3 $(s_n^{(1)})_{n\geq1}$，$(s_n^{(2)})_{n\geq1}$，$(s_n^{(3)})_{n\geq1}$ 和 $(s_n^{(4)})_{n\geq1}$ 的模拟

n	$s_n^{(1)}-\gamma$	$s_n^{(2)}-\gamma$	$s_n^{(3)}-\gamma$	$s_n^{(4)}-\gamma$
10	-3.9335×10^{-5}	-1.4560×10^{-7}	6.6340×10^{-8}	1.894×10^{-9}
50	-3.2952×10^{-7}	-2.7227×10^{-9}	2.3494×10^{-11}	1.5475×10^{-13}
100	-4.1428×10^{-8}	-1.7358×10^{-10}	7.4335×10^{-13}	2.4922×10^{-15}
500	-3.3295×10^{-10}	-2.8227×10^{-13}	2.4019×10^{-16}	1.9×10^{-19}
1000	-4.1643×10^{-11}	-1.7673×10^{-14}	7.4348×10^{-18}	-7.9408×10^{-20}

参考文献：

[1] DeTemple W. A quicker convergences to Euler’s constant. Am. Math. Mon., 1993,100(5): 468–470

[2] DeTemple W. A gemetric look at sequences that converge to Euler’s constant [J]. College Math, 2006, 37: 128–131

[3] Lu D. A new quicker sequence convergent to Euler’s constant [J]. Number Theory. 2014, 136: 320–329

[4] Lu D. Some quicker classes of sequences convergent to Euler’s constant. Appl. Math. Comput., 2014, 232: 172–177

[5] Lu D. Some new convergent sequences and inequalities of Euler’s constant [J]. Math. Anal. Appl., 2014, 419(1): 541–552

[6] Lu D, Song L, Yu Y. Some new continued fraction approximation of Euler’s constant [J]. Number Theory, 2015, 147: 69–80

[7] Mortici C, Vernescu A. An improvement of the convergence speed of the sequence (γn)n≥1 converging to Euler’s constant. An. S,tiint,. Univ. Ovidius Constant,a Ser. Mat., 2005, 13(1): 97–100

[8] Mortici C. Optimizing the rate of convergence in some new calsses of sequences convergent to Euler’s constant. Anal. Appl. (Singap.), 2010, 8(1): 99–107

[9] Mortici C. Very accurate estimates of the polygamma functions. Asymptot. Anal., 2010, 68(3): 125–134

[10] Vernescu A. A new accelerate convergence to the constant of Euler. Gaz.Matem. Ser. A Buchar., 1999, 104(4): 273–278

[11] Mortici C. A quicker convergence toward the gamma constant with the logarithm term involving the constant e. Carpathian J. Math., 2010, 26: 86-91

[12] Mortici C. On new sequences converging towards the Euler-Mascheroni constant. Comput. Math. Appl.,

2010, 59: 2610-2614

[13] Mortici C. Product approximations via asymptotic integration. Amer. Math. Monthly, 2010, 117: 434-441

[14] Mortici C. A new Stirling series as continued fraction. Numer. Algorithms, 2011, 56: 17-26

[15] Mortici C. A continued fraction approximation of the gamma function. J. Math. Anal. Appl., 2013, 402: 405-410

[16] A. Vernescu, A new accelerate convergence to the constant of Euler, Gazeta Matem. Ser. A, Bucharest., 1999, 104: 273-278 (Romanian)

[17] A. Vernescu. The order of convergence of the sequence that defines the constant of Euler. Gazeta Matem., Ser. A, Bucharest., 1983, 88: 380-381 (Romanian)

[18] R. M. Young. Euler’s constant. Math. Gaz., 1991,75: 187-190