

反铁磁体系里的朗道-栗弗席兹-布洛赫方程

华南师范大学 陈志源

(1. 华南师范大学华南先进光电子研究院, 广东省广州市 510006)¹

(于 2019 年 6 月 25 号发表于 Physical Review B)

秦明辉 副研究员

中文摘要: 反铁磁畴壁在下一代自旋电子学器件如高速赛道存储器中具有重大潜在应用价值, 其动力学调控是当前自旋电子学的材料物理核心问题。目前, 大多数理论工作基本是基于原子模型的 Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG) 方程模拟方法, 但对于大尺寸体系来说其计算量是很大的, 对应的微磁学模拟也很难考虑温度效应。适用于反铁磁多畴体系的 Landau-Lifshitz-Bloch (LLB) 方程的导出, 使得大尺寸有限温度下反铁磁体系动力学的模拟研究成为可能, 同时其连续性方程可用于相关的理论研究。研究表明, 该理论可以很好地描述畴壁在有限温度下的静态性质以及在温度梯度场下的动力学性质, 并预言了相变点附近新的物理机制。此外, 相比传统的 LLG 模拟, LLB 模拟计算所需时间要比前者少两个数量级。

英文摘要: We derive the Landau-Lifshitz-Bloch equation accounting for the multi-domain antiferromagnetic (AFM) lattice at finite temperature, in order to investigate the domain wall (DW) motion, the core issue for AFM spintronics. The continuity equation of the staggered magnetization is obtained using the continuum approximation, allowing an analytical calculation on the domain wall dynamics. The influence of temperature on the static domain wall profile is investigated, and the analytical calculations reproduce well earlier numerical results on temperature gradient driven saturation velocity of the AFM domain wall, confirming the validity of this theory. Furthermore, the decrease of the acceleration and the increase of the saturation velocity of the domain wall with the increase of the temperature are uncovered for a fixed gradient.

关键词: 反铁磁动力学; LLB 方程; 畴壁性质

一、引言

近几年, 随着探测手段的提高和其优良特性的发现^[1-2], 反铁磁材料引起了越来越广泛的关注。一方面, 由于没有宏观磁矩和极低的磁化率, 反铁磁器件在外场下具有更好的抗

¹国家级大学生创新创业训练计划支持项目 (201710574054)

作者简介: 陈志源 (1997-)、男, 广东省潮州市, 物理勤勤创新班, 2015 级, 反铁磁动力学

干扰能力,同时因其不会产生杂散场,对应的电子器件可以具备更高的集成度;另一方面,相比铁磁材料,反铁磁材料拥有更高频率的自旋波模式和超快的动力学性质,为未来信息的快速写入和读取提供了可能的原材料。值得注意的是,畴壁在磁性材料的应用中发挥着关键性的作用,畴壁的移动速度也决定着器件的运行速度。最近提出的许多驱动方式都可以很好地驱动反铁磁畴壁移动^[3-5],为相关器件设计和实验的开展提供了有益的指导作用。

不过,目前用于研究反铁磁体系的模拟方法主要为基于原子模型的 Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG)方程,这对于大多数实际体系,比如含畴壁的体系来说其计算量是不可想象的。大体上,畴壁的尺寸通常就有十几纳米,为了合理地描述该体系,模拟的尺寸至少在几百纳米的数量级,而这用原子模型进行模拟计算的话其计算量是异常巨大的。为了使计算量在接受的范围内,人们有时会采用特别大的各向异性常数(通常要选取比实际值大两个数量级)来减小畴壁宽度,进而缩小所需模拟的体系的尺寸。不过,这种强制的方法的计算出来的结果虽然也可以定性地描述体系的性质,但在定量上是明显偏离实际情况的。此外,为了能够研究热涨落的影响,人们往往会在 LLG 方程里引入随机项,但这会显著地增加运算量。

为了减少计算量,人们可以利用粗粒化将一小块区域里的所有自旋用一个宏自旋来近似代替,使得计算量减小了两到三个数量级。然而,这种基于 LLG 方程的微磁学模拟在高温下会明显偏离实际情况,原因是 LLG 方程假设自旋的大小在外场作用下是不变,而这与宏自旋的大小会随温度的升高而减小这一事实是相违背的。此外,基于 LLG 方程的连续性方程也存在着同样的问题,只适用于远离相变温度的情况。为了能更好地研究温度梯度场驱动反铁磁畴壁等涉及到温度效应的现象,亟待寻找适用于有限温度下的研究的更为高效的数值模拟以及理论计算方法。

总的来说,目前仍然缺少可以描述有限温度下的反铁磁体系性质的离散和连续模型方法。值得注意的是,在铁磁里,前人通过引入纵向弛豫来描述磁矩大小随温度的变化的方法导出了 Landau-Lifshitz-Bloch (LLB)方程,使得对于铁磁畴壁有限温度甚至接近临界温度附近的动力学研究成为可能^[6-7]。同样地,人们会问,这种方法是否可以用到反铁磁体系。实际上,之前已经有小组推导出了亚铁磁体系的 LLB 方程^[8],这一方程也就成为了推导反铁磁体系 LLB 的基础。

二、结果与分析

(一) 反铁磁 LLB 方程的导出

U. Atxitia 等人基于铁磁体系的 LLB 方程并结合平均场的方法导出了亚铁磁中无序体系的 LLB 方程^[8]。由于亚铁磁的两套子晶格是相对独立的,故有两个自由度,因而需要两套 LLB 方程来描述,

$$\frac{1}{\gamma_v} \frac{d\mathbf{m}_v}{dt} = \mathbf{m}_v \times \mathbf{H}_v + \alpha_{\parallel} \frac{\mathbf{m}_v \cdot \mathbf{H}_v}{m_v^2} \mathbf{m}_v - \alpha_{\perp} \frac{\mathbf{m}_v \times (\mathbf{m}_v \times \mathbf{H}_v)}{m_v^2} \quad (1.1)$$

这里,点表示对时间的导数, \mathbf{H}_v 为子晶格 v 所受到的有效场,包括外磁场 \mathbf{H} 、各向异性场 $\mathbf{H}_{A,v}$ 和内部交换作用场 $\mathbf{H}_{v,k}$,表达式分别为

$$\mathbf{H}_{A,v} = -\frac{1}{\tilde{\chi}_{v,\perp}} (m_{x,v} \mathbf{e}_x + m_{y,v} \mathbf{e}_y), \quad \mathbf{m}_v = (m_{x,v} \mathbf{e}_x, m_{y,v} \mathbf{e}_y, m_{z,v} \mathbf{e}_z), \quad (1.2)$$

$$\mathbf{H}_{v\kappa} = -\frac{J_{0,v\kappa}}{\mu_v} \frac{\mathbf{m}_v \times (\mathbf{m}_v \times \mathbf{m}_\kappa)}{m_v^2} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Lambda_{vv}} \left(\frac{m_v^2}{m_{e,v}^2} - 1 \right) - \frac{1}{\Lambda_{v\kappa}} \left(\frac{\tau_\kappa^2}{\tau_{e,\kappa}^2} - 1 \right) \right] \mathbf{m}_v \quad (1.3)$$

其中, Λ_{vv} 、 $\Lambda_{v\kappa}$ 、 τ_κ 、 $\tau_{e,\kappa}$ 等为中间变量, $\chi_{v,\perp}$ 为纵向磁化率。注意到此处的无序并非拓扑无序, 而仅仅是成分无序, 因而我们可以直接把亚铁磁的结果运用到反铁磁体系上。下面先考虑 Néel 态反铁磁体, 这时只有子晶格间的相互作用而没有子晶格内部的相互作用, 故只需令 $\gamma_v = \gamma_\kappa = \gamma$, $m_{e,v} = m_{e,\kappa} = m_e$, $\mu_v = \mu_\kappa = \mu_S$, $\chi_{v,\perp} = \chi_{\kappa,\perp} = \chi_\perp$, $J_{0,v\kappa} = J_0 = N_D J$, 其中 J 为反铁磁交换作用常数, N_D 为每个格点最近邻的个数, 对于简单立方晶格 $N_D = 6$ 。这时内部交换场可化简为

$$\mathbf{H}_{v\kappa} = -\frac{J_0}{\mu_S} \frac{\mathbf{m}_v \times (\mathbf{m}_v \times \mathbf{m}_\kappa)}{m_v^2} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\tilde{\chi}_\parallel} \left(\frac{m_v^2}{m_e^2} - 1 \right) + \frac{|J_0|}{\mu_S} \frac{m_v^2 - \tau_\kappa^2}{m_e^2} \right] \mathbf{m}_v \quad (1.4)$$

为求解出上面的方程, 我们还需要知道各种物理参数与温度的函数关系, 如纵向和横向磁化率、自发磁化强度以及交换刚度。其中一种是通过实验进行测定, 但对于纯模拟的小组来说是不大可行的; 另一种方法是利用原子尺度的带随机项的 LLG 方程进行模拟并拟合相应的曲线, 其模拟结果如图 1 所示。

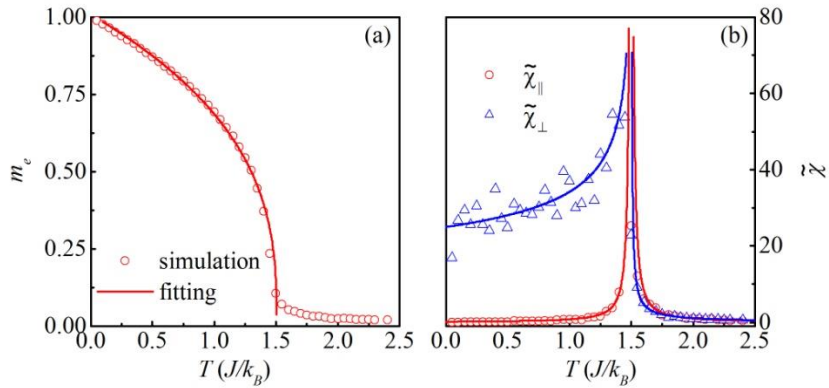


图 1 (a)平衡磁化强度和(b)纵向(红点)、横向(蓝点)磁化率随温度的变化

(二) LLB 方程中的随机项

因为反铁磁 LLB 方程实际上是从铁磁 LLB 方程推广而得到, 故我们可对照铁磁 LLB 方程^[9], 直接写出含随机场的反铁磁 LLB 方程,

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d\mathbf{m}_v}{dt} = \mathbf{m}_v \times \mathbf{H}_v + \alpha_\parallel \frac{\mathbf{m}_v \cdot \mathbf{H}_v}{m_v^2} \mathbf{m}_v - \alpha_\perp \frac{\mathbf{m}_v \times [\mathbf{m}_v \times (\mathbf{H}_v + \boldsymbol{\xi}_{\perp,v})]}{m_v^2} + \boldsymbol{\xi}_{\parallel,v} \quad (2.1)$$

其中 $\boldsymbol{\xi}_{\parallel,v}$ 、 $\boldsymbol{\xi}_{\perp,v}$ 分别为纵向和横向随机场,

$$\langle \xi_{\eta,v}^a(t, \mathbf{r}) \xi_{\eta,v}^b(t', \mathbf{r}') \rangle = 2D_\eta \delta_{ab} \delta(t-t') \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (2.2)$$

其中 $\eta = \parallel, \perp$, a, b 为笛卡尔分量(= x, y, z), D_\parallel 、 D_\perp 分别为纵向和横向扩散系数,

$$D_{\parallel} = \frac{\alpha_{\parallel} \gamma k_B T}{M_S V}, D_{\perp} = \frac{(\alpha_{\perp} - \alpha_{\parallel}) k_B T}{\gamma M_S V \alpha_{\perp}^2} \quad (2.3)$$

这里 V 为颗粒的体积， k_B 为玻尔兹曼常数， M_S 为饱和磁化强度。

(三) 颗粒间的相互作用场的导出

上面的方程是把整个体系看成一个单畴进行模拟的，实际上很多时候我们想要知道里面的细节，比如对于纳米条，我们想知道里面的畴壁在外场作用下是如何运动的，这时就需要把整个纳米条再划分成多个细小的颗粒进行研究，其中每个颗粒对应一套 LLB 方程组即两个方程，如图 2 所示。然而，原有的有效场并不描述颗粒与颗粒间的相互作用，为此我们有必要对其进行进一步地修正。

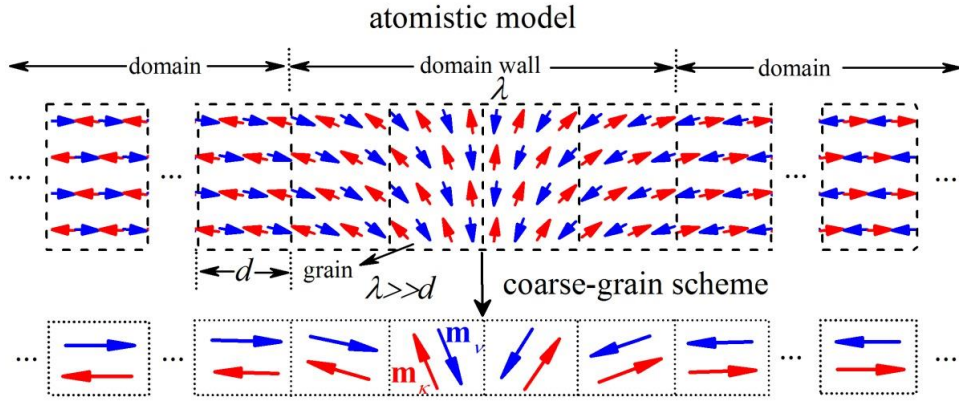


图 2 反铁磁体系的粗粒化近似示意图，其中上图为原子模型，下图为粗粒化模型，蓝色、红色箭头分别表示两套子晶格的磁化强度

值得注意的是，这时的有效场应带有表示格点的下标，

$$\mathbf{H}_{v,i} = \mathbf{H} + \mathbf{H}_{A,v,i} + \mathbf{H}_{v\kappa,i} + \mathbf{H}_{ex,v,i} \quad (3.1)$$

其中 i 表示格点位置， $\mathbf{H}_{ex,v,i}$ 为修正项即颗粒间的相互作用场。简单起见，先只考虑其中一个近邻颗粒的作用，并只计处于边界的原子间的相互作用，这部分附加能量为

$$H_{exij} = -J \sum_{\langle k,l \rangle} \mathbf{S}_k \cdot \mathbf{S}_l = -J \frac{F}{2a_l^2} \left(\frac{\mathbf{m}_{v,i} \cdot \mathbf{m}_{\kappa,j}}{m_{v,i} m_{\kappa,j}} + \frac{\mathbf{m}_{\kappa,i} \cdot \mathbf{m}_{v,j}}{m_{\kappa,i} m_{v,j}} \right) \quad (3.2)$$

这里求和是对两颗粒界面所有自旋对求和，其中 F 为界面的面积， a_l 为晶格常数。因两套子晶格的原子是交错分布的，故能量表达式中也只有 v 、 κ 两种格点间的相互作用，那么对应的有效场为

$$\mathbf{H}_{ex,v,i} = -\frac{1}{M_S V / 2} \frac{\partial H_{exij}}{\partial \mathbf{m}_v} = \frac{2A(T)}{a_l d M_S m_e^2} (\mathbf{m}_{\kappa,j} + \mathbf{m}_{v,i}) \quad (3.3)$$

这里默认选取的颗粒为正方体， d 为颗粒的尺寸。实际上，边界上自旋的方向跟对应颗粒的磁化强度的方向是不一致的，实际的能量比较低，且经相关模拟可知，对应有效场应只有上面结果的 a_l / d [10]，

$$\mathbf{H}_{ex,v,i} = \frac{a_l}{d} \frac{2A(T)}{a_l d M_S m_e^2} (\mathbf{m}_{\kappa,j} + \mathbf{m}_{v,i}) = \frac{2A(T)}{d^2 M_S m_e^2} (\mathbf{m}_{\kappa,j} + \mathbf{m}_{v,i}) \quad (3.4)$$

当考虑所有相邻颗粒的作用时，其有效场为

$$\mathbf{H}_{ex,v,i} = \frac{2A(T)}{d^2 M_S m_e^2} \sum_j (\mathbf{m}_{\kappa,j} + \mathbf{m}_{v,i}) \quad (3.5)$$

其中 j 为对所有近邻颗粒求和。

(四) LLB 方程的连续化及其静态解

为了使描述多颗粒体系的 LLB 方程组能用于理论推导，必须将里面的物理量进行连续化。类比反铁磁体系里的 LLG 方程^[5]，这里也引入两个序参量， $\mathbf{m}_i = \mathbf{m}_{v,i} + \mathbf{m}_{\kappa,i}$ 和 $\mathbf{n}_i = \mathbf{m}_{v,i} - \mathbf{m}_{\kappa,i}$ ，这里上面的 v 、 κ 分别取 1、2。对应的有效场为 $\mathbf{H}_{v,i} = \mathbf{H}_{m,i} + \mathbf{H}_{n,i}$ 和 $\mathbf{H}_{\kappa,i} = \mathbf{H}_{m,i} - \mathbf{H}_{n,i}$ 。因纵向弛豫速度比较快，故可将 LLB 方程分母中的瞬时磁化强度的模用自发磁化强度来代替，即

$$m_{v,i}^2 \approx m_{e,i}^2, m_{\kappa,i}^2 \approx m_{e,i}^2 \quad (4.1)$$

将上面两式代入原来的反铁磁 LLB 方程，连续化后得到

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{m}}{dt} = & \gamma (\mathbf{m} \times \mathbf{H}_m + \mathbf{n} \times \mathbf{H}_n) - \frac{\alpha_{\perp}}{2m_e^2} \left(\mathbf{m} \times \frac{d\mathbf{m}}{dt} + \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right) \\ & + \frac{\gamma \alpha_{\parallel}}{2m_e^2} [(\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}_n) \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_m) \mathbf{n}] \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \gamma \mathbf{n} \times \mathbf{H}_m \quad (4.3)$$

在没有外磁场的条件下，略去各向异性场，并将有效场 \mathbf{H}_m 的表达式代入简化后的 LLB 方程得

$$\mathbf{m} = \frac{\dot{\mathbf{n}} \times \mathbf{n}}{4\gamma m_e^2 (J_0 / \mu_s + 2NA / d^2 M_S m_e^2)} = A_m \dot{\mathbf{n}} \times \mathbf{n} \quad (4.4)$$

从这里可以看出，在一定近似下总磁化强度 \mathbf{m} 只是 \mathbf{n} 的函数，故可将其表达式代入 LLB 方程并消去部分 \mathbf{m} ，可得到

$$A_m \mathbf{n} \times \frac{d^2 \mathbf{n}}{dt^2} \times \mathbf{n} = \mathbf{n} \times \left(-\frac{\gamma}{2\tilde{\chi}_{\perp}} n_z \mathbf{e}_z + \frac{\gamma A(T)}{M_S m_e^2} \nabla^2 \mathbf{n} + \frac{\alpha_{\perp}}{2m_e^2} \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right) \times \mathbf{n} \quad (4.5)$$

对于静态畴壁，所有对时间的偏导数为零，对照 LLG 方程的结果，可直接得到 Néel 畴壁构型表达式 $\theta = 2 \arctan[\exp(z - z_0) / \lambda]$ ，其中 z_0 为畴壁中心位置， λ 为畴壁宽度，具体表达式为

$$\lambda(T) = \sqrt{\frac{2\tilde{\chi}_{\perp} A(T)}{M_S m_e^2}} \quad (4.6)$$

当温度为零时，则回到 LLG 方程导出的结果^[5]，初步说明我们理论的正确性。

(五) 反铁磁畴壁的静态和动力学性质研究

利用反铁磁 LLB 方程，我们可以很方便对畴壁在有限温度下的静态性质进行研究，结果如图 3 所示。在这里我们发现了三种畴壁形状：圆形、椭圆形以及线性畴壁，这一结果与铁磁畴壁是类似的^[11-13]。研究发现这与畴壁里自旋的非反平行排列是相关的。

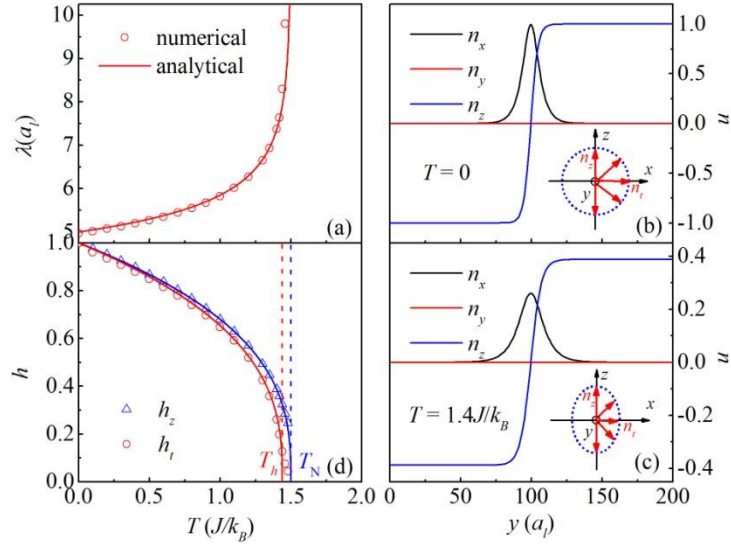


图 3 (a)畴壁宽度随温度变化曲线，和(b)、(c)、(d)奈尔矢量的纵、横向分量随温度的变化

有研究工作表明^[4]，反铁磁畴壁在线性温度梯度场下会往高温方向移动，且其移动速度与梯度场大小成正比，如图 4 所示。其中数据点是基于随机 LLG 方程的模拟结果，曲线是基于铁磁 LLB 方程导出的理论结果，具体表达式为

$$v_{DW}^{LLB} = \frac{2\gamma a^3}{\mu_s \alpha} \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial T} \quad (5.1)$$

注意到理论曲线在较大的梯度场下与模拟结果是明显不符的，实际的畴壁移动速度并不能无限增大，而是像模拟结果指出的会有饱和效应，其原因是理论结果是直接套用无 Walker Breakdown (WB)的铁磁畴壁公式，而实际上反铁磁和铁磁是两种截然不同的体系，不能简单地认为没有 WB 的结果就对应反铁磁体系。下面我们将看到，较为严格地推导需要用到刚导出的反铁磁 LLB 方程，且该方程比铁磁 LLB 方程能更好地反映反铁磁体系的特性。

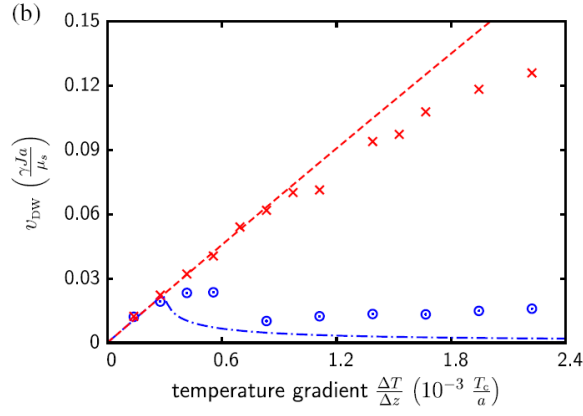


图 4 温度梯度场驱动反铁磁畴壁运动，点、线分别为模拟、理论结果(引自参考文献[4])

我们从用 Neel 矢量表示的 LLB 方程出发，并假设在梯度场下畴壁的构型基本不变，设纳米条长度方向沿着 z 轴，自旋均位于 $x-z$ 面，这时位置和时间的变量都是以 $z - vt$ 的形式出现在方程中，故有

$$\frac{dn_x}{dt} = -vn'_x, \quad \frac{dn_z}{dt} = -vn'_z, \quad \frac{d\theta}{dt} = -v\theta' = -v \frac{\sin\theta}{\lambda} \quad (5.2)$$

其中带撇表示对 $Z = z - vt$ 求导，设

$$n_x = n \sin\theta, n_z = n \cos\theta \quad (5.3)$$

其中 θ 为极角， n 为奈尔矢量的大小。将 LLB 方程变换到直角坐标系，化简后得到

$$2\tilde{A} \left(\frac{n' \sin\theta}{n\lambda} + \frac{\sin\theta \cos^3\theta}{\lambda^2} \right) - \frac{\alpha_{\perp} \sin\theta}{2m_e^2 \lambda} v + \frac{\gamma}{2\tilde{\chi}_{\perp}} \sin\theta \cos\theta = 0 \quad (5.4)$$

其中

$$\tilde{A} = \frac{\gamma A}{M_s m_e^2} - A_m v^2 \quad (5.5)$$

对上式进行积分可得，

$$2\tilde{A} \frac{n' \pi}{n\lambda} - \frac{\alpha_{\perp} \pi}{2m_e^2 \lambda} v + K_T = 0 \quad (5.6)$$

这里 K_T 与各向异性常数有关。解方程(5.7)可得

$$v = \frac{-\frac{1}{\alpha_1} + \sqrt{\frac{1}{\alpha_1^2} + 4\alpha_2}}{2\alpha_2} \quad (5.7)$$

忽略因温度梯度场而激发的各向异性梯度场的影响，那么

$$\alpha_1 = -\frac{4\gamma A(T)m'_e}{\alpha_{\perp} M_s m_e}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2N_D} \left(\frac{\mu_s}{\gamma a_1 J m_e} \right)^2 \quad (5.8)$$

当温度梯度场很大时，我们有

$$v_{\max} = \frac{\gamma a_l J \sqrt{2N_D}}{\mu_S} m_e = c(T) \quad (5.9)$$

可以看到，跟其他驱动方式一样，温度梯度场下的畴壁移动速度也会受自旋波激发的影响而出现饱和现象。不过，与 LLG 方程的结果不同，这时的自旋波速与温度有关。从图 5(a) 可以看到，我们的理论和模拟结果在低梯度下与之前的 LLG 模拟结果吻合得很好^[4]，这充分验证了我们理论的正确性。更重要的是，为了得到正确且类似的结果，LLG 模拟的计算时间要比 LLB 模拟多两到三个数量级，这很好地体现了我们理论的高效性。

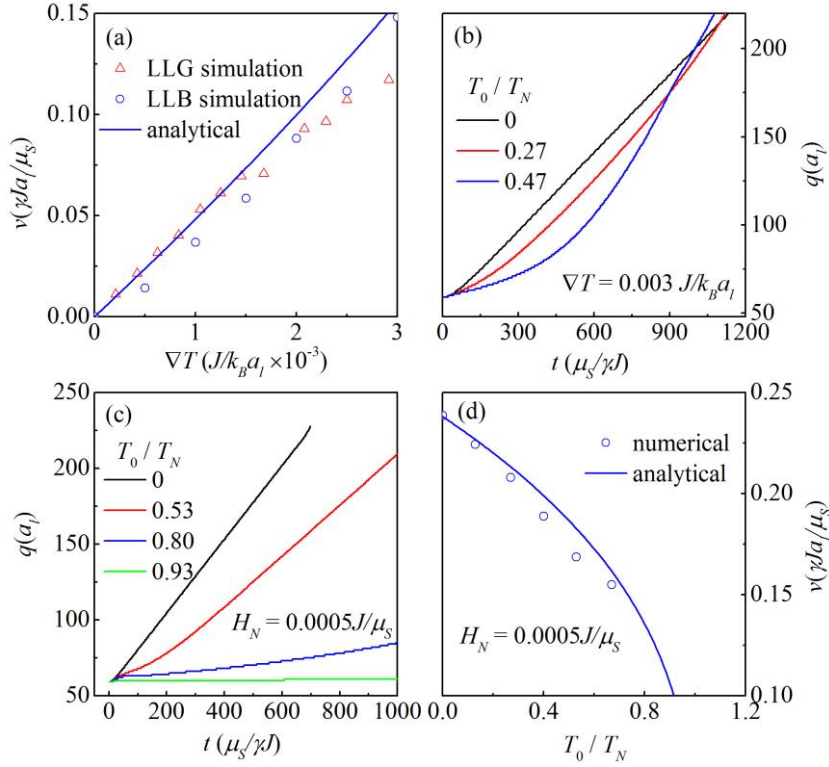


图 5 (a)温度梯度场驱动反铁磁畴壁运动的 AFM-LLB 理论解(红色实线)与 LLG 模拟(红色点)和 FM-LLB 理论结果(黑色虚线)的对比，有限温度下(b)温度梯度场和(c)NSOT 对畴壁的驱动作用，(d) 不同温度下 NSOT 驱动畴壁移动的理论(实线)和模拟(点)对比

为了更好地体现 LLB 方程的意义，下面我们将 LLB 模拟应用到临界动力学上。从图 5(b) 可以看到，温度越高，畴壁加速所需要的时间就越长，畴壁的移动速度越慢，这一现象与交换作用随温度的升高而减弱有关。不过，由于温度越高，平衡磁化强度随温度的变化越大，这会导致畴壁的饱和速度也增大，如图 5(b) 所示。故而，畴壁最终的速度大小是由多种因素决定的。

注意到温度梯度场下畴壁在移动过程中的温度并非定值，这会使得现象更为复杂。为此，下面我们研究有限温度下 Néel 自旋轨道耦合力矩(NSOT)对畴壁的驱动效应。由图 5(c)、(d) 所示，该驱动方式很好地证明了上面温度梯度场驱动的主要结论，这也从另一角度再一次说明了 LLB 理论的正确性。

三、总结

总的来说,考虑到基于原子模型的 LLG 方程在研究有限温度下大尺寸反铁磁体系的动力学性质时存在计算量巨大且效率较低等问题,我们基于前人的工作推导出了适用于反铁磁多畴体系的 LLB 方程,同时利用连续近似我们也推导出了对应的连续性方程,为接下来的理论研究提供一种新的研究工具。此外,对畴壁在有限温度下的静态性质和在温度梯度场的动力学性质的研究充分验证了 LLB 理论的正确性。更重要的是,我们的理论还揭示了畴壁在相变温度点附近的奇特的动力学行为,而这是传统 LLG 模拟所做不到的。

参考文献:

- [1]. Kühn, D. Schick, N. Pontius, C. Trabant, R. Mitzner, K. Holldack, H. Zabel, A. Föhlisch, and C. S. Langeheine, *Phys. Rev. Lett.* 119, 197202 (2017).
- [2]Fina, X. Martí, D. Yi, J. Liu, J. H. Chu, C. R. Serrao, S. Suresha, A. B. Shick, J. Železný, T. Jungwirth, J. Fontcuberta, and R. Ramesh, *Nat. Commun.* 5, 4671 (2014).
- [3]Gomonay, T. Jungwirth, and J. Sinova, *Phys. Rev. Lett.* 117, 017202 (2016).
- [4]Selzer, U. Atxitia, U. Ritzmann, D. Hinzke, and U. Nowak, *Phys. Rev. Lett.* 117, 107201 (2016).
- [5]G. Tveten, T. Muller, J. Linder, and A. Brataas, *Phys. Rev. B* 93, 104408 (2016).
- [6]Hinzke and U. Nowak, *Phys. Rev. Lett.* 107, 027205 (2011).
- [7]Schlickeiser, U. Ritzmann, D. Hinzke, and U. Nowak, *Phys. Rev. Lett.* 113, 097201 (2014).
- [8]Atxitia, P. Nieves, and O. Chubykalo-Fesenko, *Phys. Rev. B* 86, 104414 (2012).
- [9]F. L. Evans, D. Hinzke, U. Atxitia, U. Nowak, R. W. Chantrell, and O. Chubykalo-Fesenko, *Phys. Rev. B* 85, 014433 (2012).
- [10]Ler, C. Abert, F. Bruckner, and D. Suess, *Phys. Rev. B* 90, 214431 (2014).
- [11]Kazantseva, R. Wieser, and U. Nowak, *Phys. Rev. Lett.* 94, 037206 (2005).
- [12]Hinzke, N. Kazantseva, U. Nowak, O. N. Mryasov, P. Asselin, and R. W. Chantrell, *Phys. Rev. B* 77, 094407 (2008).
- [13]. Garanin, *Physica A* 172, 470 (1991).